標本平均

① 母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき，標本平均 $\overline{X}$ の期待値と標準偏差は

$$E(\overline{X})=m,\quad \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

n が大きいとき，標本平均 $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うとみなすことができる。

② 特性Aの母比率 p の母集団から抽出された大きさ n の無作為標本について，n が大きいとき，標本比率 R は近似的に正規分布 $N\left(p,\ \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$ に従うとみなすことができる。

B(n p)　(0, 1)

(m σ²)

推定，仮説検定

① 母標準偏差を σ とする。標本の大きさ n が大きいとき，母平均 m に対する信頼度 95 %の信頼区間は

$$\left[\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

母標準偏差 σ の値がわからないとき，n が十分大きければ，σ の代わりに標本の標準偏差 S を用いても差し支えない。

② 仮説検定の手順

[1] 事象が起こった原因を推測し，仮説を立てる。

[2] 仮説が正しいとして，有意水準 α の棄却域を定める。

[3] 標本から得られた確率変数の値が棄却域にある場合は仮説を棄却し，棄却域にない場合は仮説を棄却できない。

103 (1) 母平均 80，母標準偏差 12 をもつ母集団から，大きさ 400 の無作為標本を抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ が 80.9 より大きい値をとる確率を求めよ。

標本の大きさ n=400，母標準偏差 σ=12 より

標本標準偏差 $\sigma(\overline{X})=\dfrac{12}{\sqrt{400}}=\dfrac{12}{20}=0.6$

母平均 m=80 より

$Z=\dfrac{\overline{X}-80}{0.6}$ は近似的に標準正規分布 N(0,1) に従う。

$\overline{X}=80.9$ のとき

$Z=\dfrac{80.9-80}{0.6}=1.5$

$P(\overline{X}>80.9)=P(Z>1.5)$

$=0.5-p(1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$

(2) 不良品が全体の 4 %含まれる大量の製品の山から無作為に 600 個抽出する。不良品の標本比率を R とするとき，$0.032 \leqq R \leqq 0.048$ となる確率を求めよ。

母比率 p=0.04，標本の大きさ n=600 のとき

標本比率Rは近似的に正規分布 $N\left(0.04,\ \dfrac{0.04\cdot 0.96}{600}\right)$，より

N(0.04, 0.000064) に従う。よって

$Z=\dfrac{R-0.04}{0.008}$ は近似的に標準正規分布 N(0,1) に従う

$R=0.032$ のとき $Z=\dfrac{0.032-0.04}{0.008}=-1$

$R=0.048$ のとき $Z=\dfrac{0.048-0.04}{0.008}=1$

よって

$P(0.032\leqq R\leqq 0.048)=P(-1\leqq Z\leqq 1)$

$=2p(1)$

$=2\cdot 0.3413$

$=0.6826$

104 (1) ある数学の試験を受けた高校生の中から 100 人を無作為に抽出したところ，得点の平均値は 64.2 点，標準偏差は 12.0 点であった。この試験の得点の母平均を，信頼度 95 %で推定せよ。ただし，小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

標本の大きさ n=100

標本の標準偏差 σ=12.0

$1.96\cdot\dfrac{12}{\sqrt{100}}=2.352$

標本平均 $\overline{X}$=64.2

[64.2−2.352, 64.2+2.352]

64.96]

65.0]

(2) ある 1 個のさいころを 180 回投げたところ，6 の目が 38 回出た。このさいころは，6 の目の出る確率が $\dfrac{1}{6}$ でないと判断してよいか。有意水準 5 %で検定せよ。

6の目が出る確率をpとする。

6の目が出る確率が $\frac{1}{6}$ でないならば $p\neq\frac{1}{6}$

このとき「6の目が出る確率が $\frac{1}{6}$ である」

つまり $p=\frac{1}{6}$ という仮説を立てる

この仮説が正しいとき 180回のうち

6の目が出る回数Xは二項分布 $B\left(180, \frac{1}{6}\right)$

に従う

Xの期待値mは $m=180\cdot\frac{1}{6}=30$

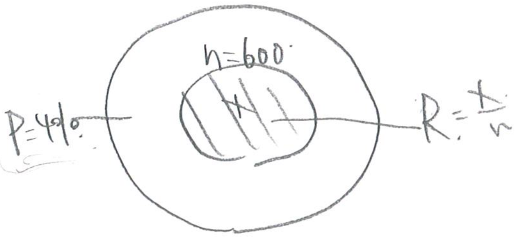
Xの標準偏差σは $\sigma=\sqrt{180\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}=5$

よって

$Z=\dfrac{X-30}{5}$ は近似的に標準正規分布

N(0,1) に従う

X=38のとき $Z=\dfrac{38-30}{5}$



$B(n, p)$ ← 固定4%なので二項分布となる

$E(X)=np$

$V(X)=np(1-p)$

それは、きたない正規分布として

$N_X(np, np(1-p))$ と表せれる。

今回は、$R=\frac{X}{n}$ の話なので

X かける $\frac{1}{n}$ して

$V(aX+b)=a^2V(X)$

$N_{\frac{X}{n}}\left(\frac{np}{n}, \frac{np(1-p)}{n^2}\right)$

$N_{R_{きた}}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$ となる。

きたない正規分布 / 標準正規分布

$N_{Rきた} \to N_{Rキレイ}$ にしたい

$z=\frac{X-m}{\sigma}$ だけどRにおきかえて、

$$\boxed{R_{キレイ}=\frac{R_{きたない}-m}{\sigma}}$$

$N_{R_{きた}}(\underset{m}{0.04}, \underset{\sigma^2}{0.000064})$

$\sigma=0.008$

$\boxed{p=0.04}$

$\sigma^2=\frac{p(1-p)}{n}=\frac{0.04\cdot0.96}{600}$

$\sigma^2=0.000064$

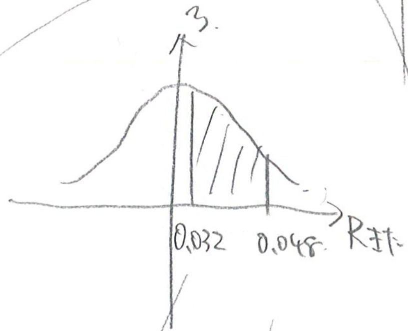
$\sigma=\sqrt{0.000064}$

$\boxed{\sigma=0.008}$

i) $R_{きたない}=0.032$ のとき、

$R_{キレイ}=\frac{0.032-0.04}{0.008}$

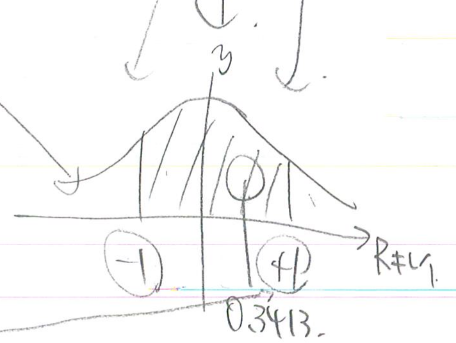
$=-1$



ii) $R_{きたない}=0.048$ のとき、

$R_{キレイ}=\frac{0.048-0.04}{0.008}$

$=+1$



$0.3413\times2=\underline{0.6826}$